ESTIMASI PARAMETER DISTRIBUSI WEIBULL DUA PARAMETER MENGGUNAKAN METODE BAYES

Indria Tsani Hazhiah[1], Sugito[2], Rita Rahmawati[2]
[1]Mahasiswa Jurusan Statistika FSM Universitas Diponegoro
[2]Staf Pengajar Jurusan Statistika FSM UNDIP

Abstract

Interval estimation of a parameter is one part of statistical inference. One of the methods that used is the Bayes method. A Bayesian method is combine prior distribution and distribution of samples, so that the posterior distribution can be obtained. Interval estimation using a method Bayes called credibel interval estimation. In this thesis, the distribution of the sample is used a two-parameter Weibull distribution scale-shape-version of survival distribution (reliability). Data that used are data that is not censored data type and data type II censored if prior distribution using non-informative which of the produce distribution the resulting posterior distribution is gamma distribution. Parameters of the sample distribution that to find out is a parameter Λ that b^{-c} by the parameter c (shape parameter) known while the parameter b (scale parameter) had unknown.

Keywords: Bayes Method, Two-Parameters Weibull Distribution , Gamma Distribution, The Estimated Credible Interval.

1. Pendahuluan

Inferensi statistika dapat dibedakan menjadi dua yaitu estimasi parameter dan uji hipotesis. Estimasi parameter sendiri dapat berupa estimasi parameter titik dan estimasi parameter interval. Estimasi parameter interval dapat menggunakan dua metode yaitu metode klasik dan metode Bayes[7]. Pada metode Bayes parameter yang digunakan merupakan variabel random yang mempunyai distribusi prior. Distribusi prior adalah distribusi subyektif berdasarkan pada keyakinan seseorang dan dirumuskan sebelum data sampel diambil[7]. Distribusi sampel yang digabung dengan distribusi prior akan menghasilkan distribusi posterior[3]. Distribusi posterior menyatakan derajat keyakinan seseorang mengenai suatu parameter setelah sampel diamati[7]. Metode Bayes menggabungkan distribusi sampel dan distribusi prior sehingga menjadi distribusi posterior yang akan digunakan dalam menentukan inferensi tentang suatu parameter yang masih dipandang sebagai variabel random.

Salah satu distribusi lain yang banyak juga digunakan akhir-akhir ini dalam menangani masalah tersebut adalah distribusi Weibull yang diperkenalkan oleh fisikawan Swedia yaitu Waloddo Weibull pada tahun 1939[6]. Distribusi Weibull selama bertahun-tahun menjadi salah satu model data statistik yang memiliki jangkauan luas dari aplikasi dalam uji hidup dan teori reliabilitas dengan kelebihan utamanya adalah menyajikan keakuratan kegagalan dengan sampel yang sangat kecil[4].

Metode Bayes yang diterapkan pada Distribusi Weibull dapat membantu untuk mempermudah penelitian yang dilakukan dengan memandang banyaknya biaya dan waktu yang dibutuhkan apabila harus memenuhi data cukup, sehingga dapat meringankan biaya dan waktu yang relatif lebih sedikit dengan mengandalkan informasi dari penelitian sebelumnya.

Dalam tulisan ini, permasalahan yang dibahas yaitu menentukan bentuk estimator (penduga) Bayes untuk distribusi Weibull dua parameter dengan sampel lengkap dan sampel tersensor Tipe II. Dalam tulisan ini, pembahasan masalah akan dibatasi mengenai:

1. Distribusi sampel yang digunakan adalah sampel lengkap dan sampel tersensor Tipe II distribusi Weibull
2. Menggunakan prior non-informatif sebagai distribusi prior
3. Menentukan estimator Bayesian parameter $\Lambda = b^{-c}$ dengan parameter c (*shape)* diketahui.

Tujuan dari tulisan ini adalah menggunakan metode Bayesian untuk mengetahui estimator parameter skala pada distribusi Weibull dua parameter dengan estimator parameter bentuk yang diketahui.

2. Tinjauan Pustaka

2.1. Distribusi Gamma

Distribusi Gamma mendapat namanya dari fungsi Gamma yang sudah dikenal luas, dan dipelajari dalam banyak bidang matematika. Distribusi Gamma yang ditransformasi akan menghasilkan distribusi invers Gamma. Sebelum membahas distribusi Gamma dan invers Gamma, terlebih dahulu akan ditinjau fungsi Gamma dan beberapa sifatnya yang penting. Fungsi Gamma dapat dinyatakan sebagai :

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx \qquad , n > 0 \tag{1}$$

Fungsi distribusi kumulatif untuk distribusi Gamma dinyatakan dalam bentuk:

$$F(x;k;\theta) = \int_0^x \frac{1}{\theta^k \Gamma(k)} x^{k-1} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) dx \tag{2}$$

Jika X berdistribusi Gamma dengan parameter $k = \alpha$ dan $\theta = \beta$[2] maka

1. $M_X(t) = (1 - t\beta)^{-\alpha}$
2. $E(X) = \alpha\beta$
3. $Var(X) = \alpha\beta^2$

2.2. Distribusi Weibull

Distribusi Weibull pertama kali diperkenalkan oleh Weibull pada tahun 1936 dengan 3 parameter, yang kemudian terdapat distribusi Weibull dengan dua dan satu parameter, dengan masing-masing distribusinya[3] :

1. Tiga parameter

$$f(x|a,b,c) = \frac{c}{b}\left(\frac{x-a}{b}\right)^{c-1} \exp\left\{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^c\right\}, \qquad x \ge a \tag{3}$$

2. Dua parameter

a) $$f(x|0,b,c) = \frac{c}{b}\left(\frac{x}{b}\right)^{c-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{b}\right)^c\right\}, \tag{4}$$

Distribusi ini disebut versi skala bentuk

b) $$f(x|a,1,c) = c(x-a)^{c-1} \exp\left\{-(x-a)^c\right\}, \tag{5}$$

Distribusi ini disebut versi lokasi bentuk

c) $f\left(x|a,b,1\right)=\frac{1}{b}\exp\left\{-\left(\frac{x-a}{b}\right)^{c}\right\},$ (6)

Distribusi ini disebut versi pergeseran skala

3. Satu parameter

a) $f\left(x|0,1,c\right)=c\left(x\right)^{c-1}\exp\left\{-\left(x\right)^{c}\right\}$

b) $f\left(x|0,b,1\right)=\frac{1}{b}\exp\left\{-\left(\frac{x}{b}\right)^{c}\right\}$

c) $f\left(x|a,1,1\right)=\exp\left\{-\left(x-a\right)^{c}\right\}$

dengan a = parameter lokasi, b = parameter skala dan c = parameter bentuk

2.3. Distribusi Weibull Dua Parameter

Distribusi Weibull adalah salah satu distribusi kontinu yang pertama kali diperkenalkan oleh fisikawan Swedia bernama Waloddi Weibull pada tahun 1939. Sebuah peubah acak kontinu X berdistribusi Weibull, dengan parameter λ dan c, jika fungsi densitasnya yaitu[7]:

$$f\left(x|0,\lambda,c\right)=c\lambda x^{c-1}\,exp\left\{-\lambda x^{c}\right\},\ x>0,\ \text{nol yang lainnya} \tag{7}$$

dengan $\lambda > 0$ dan $c > 0$.

2.4. Teori Bayesian

$$P(A_j|B)=\frac{P(A_j)P(B|A_j)}{\sum_{i=1}^{k}P(A_i)P(B|A_i)}$$

Teorema Bayes memberikan aturan sederhana untuk menghitung peluang bersyarat peristiwa A_i jika B terjadi, jika masing-masing peluang tak bersyarat A_i dan peluang bersyarat B jika A_i terjadi diketahui.

2.5. Distribusi Prior

Metode Jeffrey's

Menurut[1], metode Jeffrey's menyatakan bahwa distribusi prior $g(\lambda)$, merupakan akar dari informasi Fisher yang dinyatakan dalam:

$$g(\lambda)\propto\sqrt{\mathrm{I}(\lambda)}$$

dimana informasi Fisher $\mathrm{I}(\lambda)$ dinyatakan

$$\mathrm{I}(\lambda)=-E\left(\frac{\partial^{2}\ln f\left(t|\lambda\right)}{\partial\lambda^{2}}\right)$$

2.6. Distribusi Posterior

Pada[5], distribusi posterior adalah fungsi densitas bersyarat λ jika diketahui nilai observasi x. Ini dapat dituliskan sebagai:

$$f(\lambda\,|\,x)=\frac{f(\lambda,x)}{f(x)}$$

Fungsi kepadatan bersama dan marginal yang diperlukan dapat ditulis dalam bentuk distribusi prior dan fungsi likelihood,

$$f(\lambda, x) = f(x \mid \lambda).f(\lambda) \tag{8}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda, x) d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) f(x \mid \lambda) d\theta$$

Sehingga fungsi densitas posterior untuk variabel random kontinu dapat ditulis sebagai:

$$f(\lambda \mid x) = \frac{g(\lambda) f(x \mid \lambda)}{\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) f(x \mid \lambda) d\lambda} \tag{9}$$

3. Metodologi

3.1. Jenis dan Sumber Data

Data yang akan digunakan sebagai studi literature pada tulisan ini berupa bangkitan data dari sofware R yang berdistribusi Weibull dengan parameter *shape* dan *scale.*

3.2. Teknik Pengolahan Data

Pengolahan data dilakukan secara manual dengan dibantu *software* Exel sebagai alat bantu perhitungan data dan *software* R yang digunakan dalam pembangkitan data.

3.3. Metode Analisis

Tahapan analisis yang dilakukan sebagai berikut:

Tahap I : Menggunakan sampel data lengkap dan sampel data tersensor tipe II yang berdistribusi Weibull dua parameter

Tahap II : Distribusi Weibull dua parameter ditransformasikan ke bentuk distribusi Eksponensial dengan mengubah T^c menjadi Y menggunakan transformasi jakobian yaitu

$$f_y(y) = f_x\left[g^{-1}(y)\right] \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|$$

Tahap III : Menentukan fungsi likelihoodnya

a. Sampel data lengkap menggunakan rumus

$$L(\lambda | y, n) \propto \prod_{i=1}^{n} f(y|\lambda) \infty f(t|\lambda)$$

b. Sampel data tersensor tipe II menggunakan rumus

$$L(\lambda | y, r, n) \propto \prod_{i=1}^{r} f(y|\lambda). \prod_{j=r+1}^{n} S(y) \infty f(t|\lambda)$$

Tahap IV: Menentukan distribusi prior

a. Menentukan informasi fisher dengan rumus

$$\mathrm{I}(\lambda) = -E\left(\frac{\partial^2 \ln f(t|\lambda)}{\partial \lambda^2} \right)$$

b. Menentukan distribusi prior dengan rumus:

$$g(\lambda) \propto \sqrt{\mathrm{I}(\lambda)}$$

Tahap V : Menentukan distribusi posterior dengan menggunakan rumus :

$$f(\lambda|x)=\frac{g(\lambda)f(x|\lambda)}{\int_{-\infty}^{\infty}g(\lambda)f(x|\lambda)d\lambda}$$

Tahap VI: Menentukan estimasi parameter Λ, ekspektasi, varian, dan interval kredibelitas.

4. Estimasi Parameter Menggunakan Metode Bayes

4.1 Distribusi Weibull sebagai Distribusi Sampel

Distribusi Weibull dua parameter versi skala bentuk sesuai pada persamaan (7) sebagai berkut,

$$f(t|0,\lambda,c)=\begin{cases} c\lambda t^{c-1}\exp\{-\lambda t^{c}\} & ,t>0 \\ 0 & ,\text{untuk t lainnya} \end{cases}$$

pada persamaan (9) ditransformasikan ke bentuk distribusi Eksponensial dengan mengubah T^{c} menjadi Y maka persamaan tersebut menjadi:

$$f_{y}(y)=f_{x}\left[g^{-1}(y)\right]\left|\frac{d}{dy}g^{-1}(y)\right|=\left(\lambda c y^{1-\frac{1}{c}}\exp(-\lambda y)\right)\left(\frac{1}{c}y^{\frac{1}{c}-1}\right) \qquad (10)$$

$$=\lambda\exp(-\lambda y)$$

4.2 Sampel Data Lengkap

Fungsi likelihood distribusi sampel untuk data lengkap adalah sebagai berikut :

$$L(\lambda|y,n)\propto\prod_{i=1}^{n}f(y|\lambda)\propto\prod_{i=1}^{n}[\lambda\exp(-\lambda y_{i})]$$

$$=\lambda^{n}\exp\left(-\lambda\sum_{i=1}^{n}t^{c}\right) \qquad (11)$$

4.2.1 Distribusi Prior Non-informatif

Sebelum informasi Fisher dicari yang dilanjutkan mencari distribusi prior menggunakan metode Jeffreys, terlebih dahulu yang harus dicari adalah fungsi log natural likelihood dari persamaan (10) yaitu

$$\ln L(\lambda|y,n)=n\ln\lambda-\lambda\sum_{i=1}^{n}y_{i}$$

$$I(\lambda)=-E\left[\frac{\partial^{2}\ln L(\lambda)}{\partial\lambda^{2}}\right]$$

$$=\frac{n}{\lambda^{2}}$$

$$g(\lambda)\propto\sqrt{I(\lambda)}=\frac{1}{\lambda}\sqrt{n}$$

4.2.2 Distribusi Posterior dari Distribusi Weibull dengan Distribusi Prior Non-Informatif

$$f(\lambda|t) = \frac{\sqrt{n}\lambda^{-1}.\lambda^{n}\exp\left(-\lambda\sum_{i=1}^{n}t^{c}\right)}{\int_{-\infty}^{\infty}\sqrt{n}\lambda^{-1}.\lambda^{n}\exp\left(-\lambda\sum_{i=1}^{n}t^{c}\right)d\lambda}$$

$$= \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}t^{c}\right)^{n}}{\Gamma(n)}\lambda^{n-1}\exp\left(-\lambda\sum_{i=1}^{n}t^{c}\right) \tag{12}$$

Distribusi posterior dari sampel data lengkap untuk distribusi Weibull dua parameter adalah *Gamma (n,* $\left(\sum_{i=1}^{n}t^{c}\right)^{-1}$ *)*

4.2.3 Estimasi Parameter Λ dari Distribusi Posterior untuk Data Lengkap

Ekspektasi *Gamma (n,* $\left(\sum_{i=1}^{n}t_i^{c}\right)^{-1}$ *)* seperti ekspektasi pada persamaan (2) yaitu

$$M_{\Lambda}(t) = \left(1 - t\left(\sum_{i=1}^{n}t_i^{c}\right)^{-1}\right)^{-n}$$

$$E\left(\Lambda\left|\sum_{i=1}^{n}t_i^{c}, n\right.\right) = n\left(\sum_{i=1}^{n}t_i^{c}\right)^{-1}$$

$$Var\left(\Lambda\left|\sum_{i=1}^{n}t_i^{c}, n\right.\right) = n\left(\sum_{i=1}^{n}t_i^{c}\right)^{-2}$$

$$\lambda_B = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}t_i^{c}}$$

$$M_{2\sum_{i=1}^{n}t^{c}\lambda}(t) = M_{\lambda}\left(t.2\sum_{i=1}^{n}t^{c}\right) = (1-2t)^{-2n/2} \tag{13}$$

Persamaan ini merupakan fungsi momen dari khi-kuadrat dengan derajat bebas *2n* yang berarti $Q = 2\sum_{i=1}^{n}t^{c}\lambda \sim \chi^2_{2n}$

Interval kredibilitas (1-α)100% untuk λ adalah

$$\frac{\chi^2_{2n;\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^{n}t^{c}} < \Lambda < \frac{\chi^2_{2n;1-\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^{n}t^{c}} \tag{14}$$

4.3 Sampel Data Tersensor Tipe II

Perbedaan sampel data tersensor tipe II dengan sampel data lengkap yaitu terdapatnya jumlah data tersensor sebesar r dari n obyek yang diobservasi pada sampel data tersensor tipe II sehingga $1 \le r \le n$.

$$L(\lambda|y,r,n) \propto \prod_{i=1}^{r} f(y|\lambda).\prod_{j=r+1}^{n} S(y)$$

$$\propto \prod_{i=1}^{r}[\lambda \exp(-\lambda y_i)].\prod_{j=r+1}^{n}\exp(-\lambda y_r)$$

$$= \lambda^r \exp\left(-\lambda\left(\sum_{i=1}^{r} t^c{}_i + (n-r)t^c{}_r\right)\right) \tag{15}$$

4.3.2 Distribusi Prior Non-informatif

Sebelum dicari informasi Fisher yang dilanjutkan mencari distribusi prior menggunakan metode Jeffreys, terlebih dahulu yang harus dicari adalah fungsi log natural likelihood dari persamaan (15)

$$\frac{\partial^2 \ln L(\lambda|y,r,n)}{\partial\lambda^2} = -\frac{r}{\lambda^2}$$

$$I(\lambda) = -E\left[\frac{\partial^2 \ln L(\lambda)}{\partial\lambda^2}\right] = \frac{r}{\lambda^2} \tag{16}$$

$$g(\lambda) \propto \sqrt{I(\lambda)} = \frac{1}{\lambda}\sqrt{r} \tag{17}$$

4.3.3 Distribusi Posterior dari Distribusi Weibull dengan Distribusi Prior Non-Informatif

$$f(\lambda|x) = \frac{g(\lambda)f(x|\lambda)}{\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)f(x|\lambda)d\lambda} = \frac{(T)^r}{\Gamma(r)}\lambda^{r-1}\exp(-\lambda T) \tag{18}$$

dengan

$$T = \left(\sum_{i=1}^{r} t^c{}_i + (n-r)t^c{}_r\right)$$

Distribusi posterior dari sampel data lengkap untuk distribusi Weibull dua parameter adalah Gamma (n, T^{-1})

4.3.4 Estimasi Parameter Λ dari Distribusi Posterior untuk Data Tersensor Tipe II

Ekspektasi *Gamma (r, T^{-1})* seperti ekspektasi pada persamaan (2) yaitu

$$M_\Lambda(t) = \left(1 - t/T\right)^{-r}$$

$$E(\Lambda | T, r) = r/T$$

$$Var(\Lambda | T, r) = r/(T)^2$$

$$\lambda_B = r\left(\left(\sum_{i=1}^{r} t_i^{\,c} + (n-r)t_r^{\,c}\right)\right)^{-1} \tag{19}$$

Dimisalkan $Q = 2T\lambda$

$$M_{2T\lambda}(t) = M_\lambda(t.2T)$$

$$= \left(1 - \left(\frac{t}{T}.2T\right)\right)^{-r}$$

$$= (1-2t)^{-2r/2} \tag{20}$$

Persamaan ini merupakan fungsi momen dari *khi-kuadrat* dengan derajat bebas *2n* yang berarti $Q = 2T\lambda \sim \chi^2_{2r}$

Interval kredibilitas (1-α)100% untuk λ adalah

$$P\left(\chi^2_{2r;\alpha/2} < Q < \chi^2_{2r;1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$\chi^2_{2r;\alpha/2} < Q < \chi^2_{2r;1-\alpha/2}$$

$$\frac{\chi^2_{2r;\alpha/2}}{2T} < \Lambda < \frac{\chi^2_{2r;1-\alpha/2}}{2T} \tag{21}$$

dengan χ^2_{2r} adalah *Khi-kuadrat* dengan derajat bebas *2r*

5. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, dapat disimpulkan bahwa:

1. Estimasi parameter λ pada sampel lengkap $\lambda_B = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i^{\,c}}$ sedangkan sampel tersensor tipe II $\lambda_B = \dfrac{r}{\sum_{i=1}^{r} t_i^{\,c} + (n-r)t_r}$.
2. Estimasi credibel parameter λ distribusi Weibull dua parameter dengan parameter *shape* (c) pada sampel lengkap yaitu $\dfrac{\chi^2_{2n;\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^{n} t_i^c} < \Lambda < \dfrac{\chi^2_{2n;1-\alpha/2}}{2\sum_{i=1}^{n} t_i^c}$ sedangkan sampel tersensor tipe II yaitu $\dfrac{\chi^2_{2r;\alpha/2}}{2T} < \Lambda < \dfrac{\chi^2_{2r;1-\alpha/2}}{2T}$, sedangkan $T = \sum_{i=1}^{r} t_i^c + (n-r)t_r$.

DAFTAR PUSTAKA

1. Al Kutubi H.S dan Ali, *Maximum Likelihood Estimators with Complete and Censored DataI,* College of Nursing, Kufa University, Iraq, 2011.
2. Dudewicz, J. Edward dan Mishra, N. Satya, *Statistika Matematika Modern*, ITB, Bandung, 1995.
3. Horst, R., *The Weibull Distribution A Handbook,* Justua-Liebig-University Giessen, Jerman, 2009.
4. Hossain, A.M. dan W.J Zimmer, Comparison Of Estimation Methods For Weibull Parameters: Complete And Censored Samples, *Journal Stat. Comput*, 2003.
5. Soejoeti, Z dan Soebanar, *Inferensi Bayesian*, Karunika Universitas Terbuka, Jakarta, 1988.
6. Walpole, R. E., *Pengantar Statistika* Edisi ke-3, PT Gramedia Pustaka Utama, Jakarta, 1993.
7. Walpole, R. E dan Myers, R. H. *Ilmu Peluang dan Statistika untuk Insinyur dan Ilmuwan*, Terbitan Kedua, ITB, Bandung, 1986.